ESSEC

ÉCOLE SUPÉRIEURE DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION DE 1980

MATHEMATIQUES - 1ère épreuve

(Coef. 5)

(4h)

Dans ce problème les polynômes sont à coefficients complexes. L'ensemble des polynômes en x est donc désigné par $\mathbb{C}[x]$; l'ensemble des polynômes en x^3 est désigné par $\mathbb{C}[x^3]$; plus particulièrement π est le polynôme défini par $\pi(x) = a+bx+cx^2$ où $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ est l'une des trois racines cubiques de 1. Enfin les matrices sont carrées d'ordre 3 à éléments complexes ; toute matrice scalaire de la forme $\begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, pour $z \in \mathbb{C}$, est désignée par z.

I - 1°) Que dire d'un polynôme A tel que $A(x) = A(jx)$.

2°) Pour $B \in \mathbb{C}[x]$ on pose $R(x) = B(x) + B(jx) + B(j^2x)$ que dire de R ?

3°) Pour $P \in \mathbb{C}[x]$ on pose $H(x) = P(x).P(jx).P(j^2x)$ que dire de H ?

4°) A tout polynôme $P \in \mathbb{C}[x]$ on associe le polynôme $\tilde{P}$ défini par l'algorithme suivant :

$$P(x) \longmapsto P(y).P(jy)\ P(j^2y) = S(y^3) \longmapsto \tilde{P}(x) = S(x) \ ;$$

- donc dans P on "change" x en y, jy, j^2y puis on fait le produit des trois polynômes et dans le produit obtenu on change y^3 en x.

Soit φ l'application $P \longmapsto \tilde{P}$.

Donner les images par φ de :

a) $x-1$

b) x^2+x+1

c) $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$ où $n \in \{3p, 3p+1, 3p+2\}$ et $p \in \mathbb{N}^*$

II - Pour α complexe non nul on considère la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis pour $q \in \mathbb{C}$ on pose $L(q) = \frac{q^2K^2 + \alpha qK + \alpha^2}{3\alpha^2}$ et $L_1 = L(1)$, $L_2 = L(j^2)$, $L_3 = L(j)$.

.../...

1°) Montrer que $q^2x^2 + q\alpha x + \alpha^2 = (qx-j\alpha)(qx-j^2\alpha)$

2°) Calculer $L_1 + L_2 + L_3$ et K^3..

3°) Dresser la table de multiplication en L_1, L_2, L_3 donc donner lesproduits $\left\{L_p.L_{p'}\right\}_{(p,p') \in \{1,2,3\}^2}$

4°) Les matrices L_1, L_2 et L_3 sont-elles linéairement indépendantes ?

5°) Peut-on décomposer K et K^2 sur L_1, L_2 et L_3 ? Montrer que ceci permet une autre démonstration du 3°).

6°) Montrer que K admet α , αj et αj^2 comme valeurs propres ; si α_q désigne l'une de ces valeurs propres expliciter un vecteur propre associé sous la forme $\lambda_1 q^2 \vec{e}_1 + \lambda_2 q \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^3$; calculer λ_1 et λ_2.

Donner la matrice T de"passage"permettant de passer de la base canonique de $\mathbb{C}^3$ à la base"propre" trouvée ci-dessus dans la question 5°).

7°) Soit $P(x) = \sum_{k=o}^{14} x^k$; calculer P(K) puis $P(K).P(jK).P(j^2K)$.

8°) Pour $(a,b,c,q) \in \mathbb{C}^4$ et toujours pour $\alpha \neq 0$ on pose :

$$M(q) = \begin{pmatrix} a & cq^2\alpha^3 & bq\alpha^3 \\ bq & a & cq^2\alpha^3 \\ cq^2 & bq & a \end{pmatrix}$$

a) Expliciter, à l'aide du polynôme π, la matrice M(q) sous forme d'un polynôme en K.

b) Montrer que M(q) est diagonalisable. Expliciter ses valeurs propres à l'aide du polynôme π du préambule.

c) Montrer que les matrices M(1),M(j) et $M(j^2)$ ont même déterminant.

d) Calculer $M(1).M(j).M(j^2)$ puis $(M(1))^{-1}$ lorsque M(1) est inversible.

e) Montrer que $T.\begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.T^{-1}$ pour $(r,s,t) \in \mathbb{C}^3$ est un polynôme F en K que l'on explicitera.

f) Trouver les matrices M(1) admettant 1 comme valeur propre double et 0 comme valeur propre simple.

g) Donner le rang de M(1), M(j), $M(j^2)$. K est-elle combinaison linéaire de ces trois matrices ?

h) Expliciter 1, M(1) et $(M(1))^2$ dans la base (L_1,L_2,L_3) et donner le rang de 1, M(1) et $(M(1))^2$.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail